〈論　　文〉

事故発生の時間間隔と観測に関する注意

山　内　和　幸

あらゆる人工的なシステムについて，障害が発生する事故の頻度を測ることは保安上不可欠な作業である。しかし，複雑なシステムではすべての事故をもれなく認識することは難しい。従って，重要性を認識した後になって事故履歴を取りはじめることも考慮しておく方がよい。その際，観測方法によってはいわゆる「待ち時間のパラドックス」の影響を受ける事があるので注意が必要である。ここでは，簡単なモデルにより，この性質を表現したい。

1　観測モデルと観測量

p は非常に小さい正の数を表すとする。

決まった時間間隔で稼動と停止を繰り返すシステムがある。一回の稼動につき確率 p で事故が発生する。事故発生から数えて i 回目の稼動で次の事故が発生した場合，システム従事者は観測量 $\varphi(i)$を事故直後に報告する。例えば，$\varphi(i)$が事故の時間間隔とするならば $\varphi(i)=i-1$である。

次にシステム従事者とは異なる観測者を設定する。観測者はシステム停止時に観測開始し，その後に報告される $\varphi(i)$を記録する。ここで，観測者は観測開始後に報告される $\varphi(i)$以外の情報をシステム従事者から受けない。また，システム従事者は観測開始時刻を終始知らされないものとする。

観測者が受け取る最初の $\varphi(i)$の期待値を E_1 とし，２回目に受け取る $\varphi(i)$の期待値を E_2 とおくと，次の主張が成り立つ。

主張１　ある正の定数 c が十分大きな i について $i\varphi(i)(1-p)^i \geqq c>0$ をみたすとき，すなわち，

「$i>i_0$ ならば $i\varphi(i)(1-p)^i \geqq c$」

となる $i_0 \in \mathbb{N}$が存在するならば $E_1=E_2=\infty$である。

主張２　E_1 が有限な値に収束する場合を考える。

$\varphi(i)$が i に関して定数ではない単調増加関数であれば $E_1>E_2$ である。

特に，ある $c>0$ と $\nu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$が任意の自然数 i について

$$\varphi(i)-\varphi(i-1) \geqq ci^{\nu}$$

をみたすならば

$$E_1 \geqq E_2 + c\cdot\frac{(1-p)^{\nu+1}}{p^{\nu+1}}(\nu+1)!$$

をみたす。

上記主張のような性質は，ポアソン過程等における，待ち時間のパラドクスとしてよく知られている。([1]) しかし，観測量 $\varphi(i)$が時間間隔そのものではない場合についての知識はあまり普及しているとはいえない。数理科学の専門家以外の方々にもこの性質を認識して頂きたい。

2　主張の証明

E_1 については事故から $i-1$ 回目の稼動を終えた時点から観測をはじめて，その後 j 回目に事故が発生したと解釈する。

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(i+j-1)\cdot p\cdot(1-p)^{i-1}\cdot(1-p)^{j-1}\cdot p \\ &= \sum_{i,j\geq 1, i+j=l}\varphi(l-1)\cdot(1-p)^{l-2}p^2 \end{aligned}$$

$$=\sum_{l=2}^{\infty}(l-1)\varphi(l-1)\cdot(1-p)^{l-2}p^2$$
$$=p^2\sum_{l=1}^{\infty}l\varphi(l)\cdot(1-p)^{l-1}$$

E_2 については観測を始めてから i 回目の稼動で事故が発生し，その後 j 回目に再び事故が発生したと解釈する。

$$E_2=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)\cdot(1-p)^{i-1}p\cdot(1-p)^{j-1}\cdot p$$
$$=p^2\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)\cdot(1-p)^{j-1}$$
$$=p^2\cdot\frac{1}{1-(1-p)}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)\cdot(1-p)^{j-1}$$
$$=p\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j)\cdot(1-p)^{j-1}$$

E_1, E_2 の形を見ることで主張1が正当であることがわかる。

E_1 については次のように変形できる。

$$E_1=p^2\sum_{l=1}^{\infty}l\varphi(l)\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$=p\sum_{l=1}^{\infty}l\varphi(l)\cdot(1-p)^{l-1}(1-(1-p))$$
$$=p\sum_{l=1}^{\infty}l\varphi(l)\cdot(1-p)^{l-1}-p\sum_{l=0}^{\infty}l\varphi(l)(1-p)^{l}$$
$$=p\sum_{l=1}^{\infty}(l\varphi(l)-(l-1)\varphi(l-1))\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$=p\sum_{l=1}^{\infty}\varphi(l)\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$+p\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)(\varphi(l)-\varphi(l-1))\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$=E_2+p\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)(\varphi(l)-\varphi(l-1))\cdot(1-p)^{l-1}$$

第2項については，$(l-1)l^{\nu}\geqq(l-1)\cdot(l-2)\cdots(l-\nu-1)$ となることを利用すると，主張の仮定の下では容易に評価が出来る。実際，

$$p\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)(\varphi(l)-\varphi(l-1))\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$\geqq cp\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)l^{\nu}\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$\geqq cp\sum_{l=\nu+2}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\nu+1}(l-\mu)\cdot(1-p)^{l-1}$$
$$=cp(1-p)^{\nu+1}\sum_{l=\nu+2}^{\infty}\left(\prod_{\mu=1}^{\nu+1}(l-\mu)\right)\cdot(1-p)^{l-\nu-2}$$
$$=cp(1-p)^{\nu+1}\cdot\frac{(\nu+1)!}{(1-(1-p))^{\nu+2}}$$
$$=c\cdot\frac{(1-p)^{\nu+1}}{p^{\nu+1}}(\nu+1)!$$

以上から主張2の正当性を示すことが出来た。

3 補足

ここで挙げたモデルに関する主張は資金運用等の事故についても有意義な示唆を与える。$\varphi(i)$ として事故が発生するまでの運用益等とすると，高い配当を目指した運用をすれば ν は大きくなる。さらに，事故の危険が少なければ p も小さく，時間を掛けて2回の事故を観測することは現実的ではない。これらがリスクを見誤る原因になりうることを上記の主張は示している。

様々な錯誤の原因は調査報告や説明の瑕疵や不実だけではない。情報の受け取り方による過誤の危険性について，組織的な資金を運用する担当者は今一度認識するべきであろう。また，その他の方々も，例えば「百年に一度の危機」という言葉などの根拠についても，冷静に見極めて頂きたいと考えている。

参考文献

[1] W. フェラー（国沢清典監訳）確率論とその応用 II 上，紀伊國屋書店